МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры

КУРСОВАЯ РАБОТА

Торические схемы Гильберта

Автор — Печёнкин Николай, 302 группа

Научный руководитель — Аржанцев И. В.

1. Введение и некоторые примеры

Пусть тор T действует на аффинном многообразии $\mathbb{X}$. Основное поле k во всей работе считаем алгебраически замкнутым. Как будет показано в теореме 3, алгебра функций $k[\mathbb{X}]$ естественно градуирована группой характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T. Наша задача — параметризовать множество однородных идеалов $I \lhd k[\mathbb{X}]$, факторы по которым имеют заданные размерности компонент (или, иначе говоря, имеют заданную *функцию Гильберта*). Разберём пару примеров.

Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{A}^2$ — аффинная плоскость с координатами x, y, $T = k^\times$, $h\colon \mathfrak{X}(T) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ — функция, задающая размерности однородных компонент в факторе.

Пример 1. Действие задано соотношением $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$, $h \equiv 1$. Тогда

$$k[\mathbb{X}] = k[x, y] = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle x^{k+j}y^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ j + k \geqslant 0\right\rangle.$$

Понятно, что $I_\alpha := (xy-\alpha)$ для любого $\alpha \in k$ является идеалом с нужным свойством. С другой стороны, если идеал I обладает нужным свойством, то, т.к. xy и 1 лежат в одной однородной компоненте, в I должно лежать некоторое соотношение между ними $\beta xy - \gamma \cdot 1$, где $\beta, \gamma \in k$ и одновременно не равны нулю. Ясно, что $\beta \neq 0$, иначе бы I совпадал с $k[\mathbb{X}]$. Но тогда $I \supseteq I_{\gamma/\beta}$, а потому и совпадает с ним.

Итак, в данном случае интересующие нас идеалы параметризуются точками аффинной прямой $\mathbb{A}^1$.

Пример 2. Действие задано соотношением $t \cdot (x, y) = (tx, t^2y)$, $h(\chi) = 1$ при $\chi \geqslant 0$, $h(\chi) = 0$ иначе.

$$k[\mathbb{X}] = k[x, y] = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle x^k y^l \mid k, l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ k + 2l = j\right\rangle.$$

Идеалы $I_{(\alpha:\beta)} := (\alpha y - \beta x^2)$ удовлетворяют нашим требованиям, а то, что нет других, показывается аналогично примеру 1 через то, что y и x^2 лежат в одной однородной компоненте.

Здесь наши идеалы параметризуются точками проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

В дальнейшем мы обратимся к такому понятию как *функтор Гильберта* (определение 4). Задача о представимости этого функтора формализует задачу о параметризации идеалов, которая была рассмотрена выше. Мы вернёмся к нашим примерам, когда будем говорить о существовании *схемы Гильберта* (теорема 4), представляющей функтор Гильберта.

В данной работе содержатся также некоторые факты из теории схем и торической геометрии, свойства схемы Гильберта.

2. Необходимые сведения из теории схем

Введение в теорию схем можно прочитать в книгах [2], [5] и [4]. Здесь же мы приведём наиболее важные для нас сведения.

Для начала нам понадобится следующий факт из теории категорий. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. *Функтор точек* $\underline{X}$ — это контравариантный функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию множеств Sets, ставящий в соответствие объекту $Y \in \mathcal{C}$ множество морфизмов $\mathrm{Mor}(Y, X)$, а морфизму $f \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$ в категории $\mathcal{C}$ ($Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$) — морфизм f^* в категории множеств $\underline{X}(f)(g) := f^*g := g \circ f$, где $g \in \underline{X}(Z) = \mathrm{Mor}(Z, X)$. Контравариантный функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ *представим*, если существует $X_0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ такой, что $\mathcal{F} \cong \underline{X_0}$.

Предложение 1. *(Лемма Йонеды). Пусть F — контравариантный функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию Sets, $X \in Ob(\mathcal{C})$. Тогда множество естественных преобразований из $\underline{X}$ в F находится в естественном соответствии с элементами множества $F(X)$.*

Следствие 1. *Пусть $X, X' \in Ob(\mathcal{C})$. Если функтры $\underline{X}$ и $\underline{X'}$ изоморфны, то $X \cong X'$. Схема с точностью до изоморфизма определяется своим функтором точек.*

Доказательства этих утверждений можно найти в [2, Lemma VI-1], как и доказательство следующего предложения, которое, однако, мы разберём подробнее.

Согласно следствию 1, применённому к категории схем, схема (S-схема) полностью определяется своим функтором точек в категории схем (S-схем). Усилением этого факта служит следующее предложение.

Определение 1. Пусть S — схема. Тогда *S-схему* мы определим как схему X вместе с морфизмом $X \longrightarrow S$. *Морфизм S-схем* X, Y — это их морфизм как обычных схем, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Если при этом $S = SpecR$ — аффинная схема, то X будем назвать также *R-схемой.*

Предложение 2. (*i*) *Если R — коммутативное кольцо, то R-схема определена ограничением её функтора точек на аффинные R-схемы.*

(*ii*) *Нётерова R-схема определяется ограничением её функтора точек на аффинные нётеровы R-схемы.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Фактически теорема следует из того факта, что любая схема склеена из аффинных схем. Надо показать, что если существует $\sigma\colon \underline{X} \xrightarrow{\sim} \underline{X'}$ — изоморфизм функторов, то $X \cong X'$. Во-первых, построим по σ морфизм схем X и X'. Пусть $X = \bigcup U_\alpha$ — аффинное покрытие схемы X и $i_\alpha\colon U_\alpha \hookrightarrow X$ — соответствующие вложения. Тогда $i_\alpha \in \underline{X}(U_\alpha)$, поэтому $\sigma(i_\alpha) \in \underline{X'}(U_\alpha)$ — отображения $U_\alpha \to X'$. Для того, чтобы показать, что эти отображения задают морфизм $X \to X'$, надо показать, что они согласованы на пересечениях карт. Действительно, пусть $i_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow X$ и $\varphi\colon U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$ — морфизмы вложения. Согласованность следует из коммутативности следующей диаграммы естественного преобразования σ:

$$\begin{tikzcd} i_\alpha \in \underline{X}(U_\alpha) \arrow[r, "\sigma_{U_\alpha}"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \underline{X'}(U_\alpha) \ni \sigma(i_\alpha) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ i_{\alpha\beta} \in \underline{X}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[r, "\sigma_{U_\alpha \cap U_\beta}"] & \underline{X'}(U_\alpha \cap U_\beta) \ni \sigma(i_{\alpha\beta}). \end{tikzcd}$$

Итак, по естественному преобразованию σ мы построили морфизм $f\colon X \to X'$, который при ограничении на любую аффинную схему $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ совпадает с $\sigma(i)$. Точно так же по естественному преобразованию σ^{-1} мы можем построить морфизм $\widetilde{f}\colon X' \to X$ с аналогичными свойствами. Остаётся показать, что $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_X$ и $\widetilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{X'}$. Покажем, что $f \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_X$ (другое утверждение полностью аналогично). Морфизмы f и $\widetilde{f}$, ограниченные на открытые подсхемы в X и X', будем также обозначать f и $\widetilde{f}$.

Рассмотрим такие аффинные покрытия $X = \bigcup U_\alpha$ и $X' = \bigcup V_\beta$, что для любой схемы V_β найдётся α, такое что $\widetilde{f}(V_\beta) \subset U_\alpha$. Их можно получить, начав с произвольных покрытий $X = \bigcup U_\alpha$ и $X' = \bigcup W_\beta$, затем, рассмотрев прообразы $W_{\alpha\beta} = \widetilde{f}^{-1}(W_\beta) \cap U_\alpha$, которые в свою очередь покрыть аффинными картами.

Обозначим $j_\beta\colon V_\beta \hookrightarrow X'$ соответствующие вложения. Для любой пары индексов α и β имеем коммутативную диаграмму естественного преобразования σ:

$$\begin{tikzcd} i_\alpha \in \underline{X}(U_\alpha) \arrow[r, "\sigma_{U_\alpha}"] \arrow[d, "\widetilde{f}^*"'] & \underline{X'}(U_\alpha) \ni f \arrow[d, "\widetilde{f}^*"] \\ \widetilde{f} \in \underline{X}(V_\beta) \arrow[r, "\sigma_{V_\beta}"] & \underline{X'}(V_\beta) \ni j_\beta. \end{tikzcd}$$

Таким образом, $j_\beta = f \circ \widetilde{f}$, т.е. морфизмы $f \circ \widetilde{f}$ задают тождественный морфизм id_X.

Второе утверждение доказывается тем же самым рассуждением, что и первое, учитывая, что нётерова схема склеена из нётеровых аффинных схем и пользуясь утвеждением о структуре нётеровых схем (см. [4, Chapter II, Proposition 3.2]). □

Схемы, с которыми мы будем работать, будут *алгебраическими схемами* над полем k. Это означает, что схема рассматривается вместе с морфизмом конечного типа в $\mathrm{Spec}(k)$. Потому аффинными схемами у нас будут схемы, являющиеся спектрами конечнопорождённых алгебр над k (возможно, с нильпотентами), а остальные схемы будут локально изоморфны аффинным. Множество глобальных сечений пучка $\mathcal{O}_X$ схемы X, очевидно, является алгеброй над k, обозначается $k[X] := \mathcal{O}_X(X)$ и называется *алгеброй регулярных функций* схемы X.

3. Необходимые сведения из торической геометрии

Напомним, что m-мерный *тор* $T = T^m$ — это алгебраическая группа $(k^\times)^m$, изоморфная прямому произведению m копий мультипликанивной группы поля k, $\mathfrak{X}(T) := \mathrm{Hom}(T, k^\times)$ — *решётка его характеров*, а $\Lambda(T) := \mathrm{Hom}(k^\times, T)$ — *решётка его однопараметрических подгрупп.* Две последние изоморфны решётке $\mathbb{Z}^m$. Например, для характеров тора имеет место следующее утверждение:

Предложение 3. *Всякий характер m-мерного тора имеет вид $\chi(t_1, ..., t_m) = t_1^{k_1} ... t_m^{k_m}$, где $k_1, ..., k_m \in \mathbb{Z}$.*

Напомним ещё, что представление ρ алгебраической группы G в пространстве V (конечномерном или бесконечномерном) называется рациональным, если каждый вектор $v \in V$ лежит в конечномерном инвариантном подпространстве $U_v \subseteq V$ таком, что представление G в U_v задаётся морфизмом алгебраических групп $\rho_{U_v} : G \to GL(U_v)$.

Теорема 1. *При любом рациональном представлении тора его элементы представляются полупростыми операторами, приводящимися одновременно к диагональному виду.*

Доказательство. Это частный случай [6, гл.3, § 2, теорема 3]. □

Следствие 2. *В подходящем базисе рациональное представление ρ тора T в пространстве V задаётся диагональной матрицей, с характерами этого тора на диагонали. Имеет место разложение:*

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} V_\chi,$$

где $V_\chi := \{v \in V : \rho(t)v = \chi(t)v\}$ — весовое подпространство веса χ.

Доказательство. Фактически мы переформулировали теорему 1, воспользовавшись тем, что одномерные представления тора задаются его характерами. □

Теорема 2. *Пусть алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X. Тогда существуют аффинное пространство V и рациональное линейное представление $G : V$ такое, что X изоморфно вкладывается в V в качестве G-инвариантного замкнутого подмножества.*

Доказательство. См. [7, §1.2, теорема 1.5, стр.164]. □

Теорема 3. *Для схемы X с действием тора T её алгебра регулярных функций $k[X]$ градуирована группой характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T:*

$$k[X] = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} k[X]_\chi,$$

где $k[X]_\chi$ — подпространство T-полуинвариантных функций веса χ.

Доказательство. Действие тора даёт нам морфизм схем $\varphi \colon T \times X \to X$ и тем самым гомоморфизм алгебр $\varphi^* \colon k[X] \to k[T] \otimes k[X]$ в обратную сторону. Представление $T : k[X]$ задаётся по формуле $(t \cdot f)(x) = f(t^{-1}x)$. Теперь согласно следствию 2 нам достаточно доказать, что это представление рационально. Для произвольной функции $f \in k[X]$ имеем $\varphi^*(f) = \sum_{i=1}^N s_i \otimes c_i$, а поэтому $t \cdot f(x) = f(t^{-1}x) = \sum s_i(t^{-1}) c_i(x) \in \langle c_1, ..., c_N \rangle$. Итак, орбита f целиком содержится в некотором конечномерном подпространстве, а значит, в качестве инвариантного конечномерного пространства можно взять линейную оболочку U орбиты f. Если $\{u_i\}$ — базис U, то имеем $t \cdot u_i(x) = \sum h_{ij}(t^{-1}) \cdot u_j(x)$. Эти $h_{ij}(t^{-1})$ и задают морфизм $T \to GL(U_f)$. □

Обозначим $\mathfrak{X}_X^T := \{\chi \in \mathfrak{X}(T) : k[X]_\chi \neq 0\}$.

Предложение 4. *Если X — неприводимое аффинное многообразие, то $\mathfrak{X}_X^T$ — конечнопорождённый моноид.*

Доказательство. То, что $\mathfrak{X}_X^T$ — моноид, следует из целостности алгебры регулярных функций $k[X]$ неприводимого многообразия X, а конечная порождённость $\mathfrak{X}_X^T$ следует из конечной порождённости $k[X]$ (поскольку, если порождающие $k[X]$ выбрать однородными, то в качестве порождающих $\mathfrak{X}_X^T$ можно будет взять соответствующие веса). □

Предложение 5. *Тор T действует на аффинном многообразии X эффективно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_X^T$ порождает группу $\mathfrak{X}(T)$.*

Доказательство. Вначале пусть тор T действует на многообразии X эффективно, и предположим, что $\Gamma := \left\langle \mathfrak{X}_X^T \right\rangle \subsetneqq \mathfrak{X}(T)$. Тогда согласно [6, глава 3, §2, теорема 5] подгруппе $\Gamma \subset \mathfrak{X}(T)$ соответствует подгруппа $T^\Gamma := \left\{ t \in T : \chi(t) = 1 \quad \forall \chi \in \mathfrak{X}_X^T \right\} \subset T$, причём из того, что Γ не совпадает с $\mathfrak{X}(T)$, следует, что T^Γ содержит некоторый элемент $q \neq 1$. Вложим X в афинное пространство V согласно теореме 2. Согласно следствию 2 в подходящем базисе $x_1, ..., x_n$ пространства V представление задаётся диагональной матрицей с некоторыми характерами $\chi_1(t), ..., \chi_n(t)$ на диагонали. Действие тора эффективно, пожтому существует точка $x \in X$ такая, что $qx \neq x$. Тогда для некоторого i значения координатной функции $\mathbb{x}_i$ на x и qx различны, т.е. $\chi_i(q) \neq 1$. Таким образом, $\mathbb{x}_i$ имеет ненулевой образ в $k[X] \cong k[x_1, ..., x_n]/\mathbb{I}(X)$ и вес χ_i. Итак, $\chi_i \in \mathfrak{X}_X^T$, однако $\chi_i(q) \neq 1$, что противоречит определению T^Γ.

Обратно, пусть $\left\langle \mathfrak{X}_X^T \right\rangle = \mathfrak{X}(T)$, и предположим, что действие неэффективно. Тогда существует отличный от единицы элемент $q \in T$ такой, что $qx = x$ для любой точки $x \in X$. Т.к. q отличен от единицы, существует характер $\chi_q \in \mathfrak{X}(T)$ такой, что $\chi_q(q) \neq 1$. Однако, для любого $\chi \in \mathfrak{X}_X^T$ найдётся отличная от нуля функция $f \in k[X]_\chi$. Для неё $f(x) = f(qx) = \chi(q) f(x)$, а поэтому $\chi(q) = 1$. Характер χ_q выражается через характеры из $\mathfrak{X}_X^T$. Пусть, скажем, $\chi_q = \sum c_i \chi_i$ ($\chi_i \in \mathfrak{X}_X^T$, $c_i \in \mathbb{Z}$). Но тогда $1 \neq \chi_q(q) = \prod \chi_i(q)^{c_i} = 1$. Противоречие. □

Определение 2. *Торическим многообразием* мы будем называть неприводимое многообразие X с действием некоторого тора T, содержащее открытую орбиту, изоморфную T. Нормальности многообразия X мы не требуем.

4. Схема Гильберта и её свойства

Далее $\mathbb{X}$ обозначает некоторое неприводимое аффинное многообразие с эффективным действием тора T.

Определение 3. Пусть S - некоторая схема. *Семейством аффинных T-схем* над S будем называть схему X, снабжённую действием T, вместе с морфизмом $p \colon X \to S$ таким, что p — аффинный, конечного типа и T-инвариантный.

Заметим, что в таком случае пучок $\mathcal{O}_S$-алгебр $p_*(\mathcal{O}_X)$ снабжён согласованной градуировкой группой $\mathfrak{X}(T)$.

Пусть далее $h \colon \mathfrak{X}(T) \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ — некоторая заданная функция.

Определение 4. Будем говорить, что семейство $p \colon X \to S$ аффинных T-схем имеет *функцию Гильберта* h, если для каждого $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ пучок $\mathcal{O}_S$-модулей $p_*(\mathcal{O}_X)_\chi$ является локально свободным постоянного ранга $h(\chi)$.

Отметим, что морфизм p в определении 4 является плоским. В самом деле, для каждого $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ модуль $p_*(\mathcal{O}_X)_\chi$ является плоским над $\mathcal{O}_S$, как локально свободный пучок конечного ранга, и $p_*(\mathcal{O}_X)$ плоский, как прямая сумма плоских модулей. (Подробнее о свойствах плоских морфизмов можно прочитать в [5, 7.3.a].)

Определение 5. *Функтором Гильберта* $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}$ называется контравариантный функтор из категории схем в категорию множеств, сопоставляющий каждой схеме S множество всех замкнутых T-инвариантных подсхем $X \subseteq S \times \mathbb{X}$ таких, что проекция $p \colon X \to S$ задаёт (плоское) семейство аффинных T-схем с функцией Гильберта h. Каждому морфизму схем $\varphi \colon S_1 \to S_2$ функтор $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}$ ставит в соответствие отображение $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(\varphi)$ соответствующих множеств, переводящее элемент $X_2 \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(S_2)$ в $X_1 := \hat{\varphi}^{-1}(X_2) \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(S_1)$, где $\hat{\varphi} \colon S_1 \times \mathbb{X} \to S_2 \times \mathbb{X}$, $\hat{\varphi}(s, x) := (\varphi(s), x)$.

Теорема 4.
- (*i*) *Если $\mathbb{X} = V$ — конечномерное аффинное пространство, являющееся T-модулем, то существует квазипроективная схема $H^h_{V,T}$, представляющая функтор Гильберта $\mathcal{H}^h_{V,T}$. Она называется мультиградуированной схемой Гильберта.*
- (*ii*) *Согласно теореме 2 в случае произвольного $\mathbb{X}$ существует T-эквивариантное замкнутое вложение $\mathbb{X} \hookrightarrow V$ для некоторого конечномерного T-модуля V. Тогда функтор Гильберта $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}$ представляется замкнутой подсхемой $H^h_{\mathbb{X},T} \subseteq H^h_{V,T}$.*

Доказательство. Первая часть теоремы доказна в [3, Theorem 1.1], а вторая — в [1, Lemma 1.6]. □

Заметим, что из теоремы 4 и предложения 2 следует, что в определении 4 функтор $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}$ можно было ограничить на категорию аффинных (и даже нётеровых) схем. Таким образом, мы могли сказать, что функтор Гильберта - это ковариантный функтор из категории k-алгебр в категорию множеств, сопоставляющей каждой k-алгебре R множество однородных (относительно градуировки из теоремы 3) идеалов $I \triangleleft R \otimes_k k[\mathbb{X}]$ таких, что $(R \otimes_k k[\mathbb{X}]_\chi)/I_\chi$ является локально свободным R-модулем ранга $h(\chi)$

для каждого $\chi \in \mathfrak{X}(T)$. Тогда для гомоморфизма k-алгебр $\varphi : R \to S$ отображение $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(\varphi)$ переводит идеал $I \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(R)$ в идеал $I' = S \otimes_R I \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(S)$.

Обратимся теперь вновь к примеру 1 из введения и покажем явно, что в том случае функтор $\mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}$ представим схемой $\mathbb{A}^1$ (аффинной прямой).

Действительно, имеем $\underline{\mathbb{A}^1}(R) = \mathrm{Hom}(k[T], R)$, $\mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}(R) = \{I \triangleleft R[x,y]$ т.,ч. $(R[x,y]/I)_\chi$ — локально свободный R-модуль ранга 1 для всех $\chi \geqslant 0\}$. Изоморфизм $\sigma\colon \underline{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}$ зададим следующим образом: $\sigma_R(\varphi) = (xy - \varphi(T))$. Ясно, что $\sigma_R(\varphi) \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}(R)$ (т.к. $R[x,y]_\chi/(\sigma_R(\varphi))_\chi \cong R$ — свободный R-модуль для $\chi \geqslant 0$). Инъективность отображения σ_R тоже не вызывает сомнений. Покажем сюръективность. Достаточно показать, что все идеалы в $\mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}(R)$ имеют вид $(xy - r)$ для некоторого элемента $r \in R$ (это и есть суть все идеалы из $\sigma_R(\underline{\mathbb{A}^1}(R))$). Отметим, что никакие два идеала из $\mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}(R)$ не могут содержаться один в другом. Полезно также понимать, что $R[x,y]_0 = R[xy]$. Итак, пусть $I \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}(R)$.

I. Пусть вначале мы знаем, что $R[x,y]_0/I_0$ — свободный R-модуль ранга 1, $[a]$ — его порождающий элемент ($a \in R[x,y]_0$, $[\ ]$ обозначают смежный класс элемента в факторе). Тогда $[1] = r_1[a]$, $[a^2] = r_2[a]$, $[xy] = r_3[a]$ для некоторых $r_1, r_2, r_3 \in R$. Тогда $[a(a - r_2)] = [0] \Rightarrow [r_1 a(a - r_2)] = [0] \Rightarrow [a - r_2] = [0] \Rightarrow [a] = [r_2] \Rightarrow [xy] = [r_3 a] = [r_3 r_2] \Rightarrow xy - r_2 r_3 \in I \Rightarrow I \supseteq (xy - r_2 r_3) \Rightarrow I = (xy - r_2 r_3)$.

II. Теперь рассмотрим общий случай, т.е. $R[x,y]_0/I_0$ — локально свободный R-модуль ранга 1. Это означает, что найдутся $r_1, ..., r_n \in R$ такие, что $(r_1, ..., r_n) = R$, и $(R[x,y]_0)_{r_i}/(I_0)_{r_i} = R_{r_i}[xy]/(I_0)_{r_i}$ — свободный R_{r_i} модуль ранга 1 для каждого $i = 1, ..., n$. Теперь у нас модуль свободный, а значит из рассуждения в случае I следует, что $xy - q_i \in I_{r_i}$ для некоторого $q_i \in R_{r_i}$. Умножив левую часть на достаточно большую степень r_i, получим $r_i^{k_i} xy - s_i \in I$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $s_i \in R$ и каждого i. Легко видеть, что из условия $(r_1, ..., r_n) = R$ следует, что $(r_1^{k_1}, ..., r_n^{k_n}) = R$, поэтому для некоторых $w_i \in R$ имеем $\sum w_i r_i^{k_i} = 1 \Rightarrow \sum (w_i r_i^{k_i} xy - w_i s_i) = xy - \sum w_i s_i \in I \Rightarrow I \supseteq (xy - \sum w_i s_i) \Rightarrow I = (xy - \sum w_i s_i)$.

Итак, сюръективность σ_R проверена. Остаётся проверить что σ, действительно, задаёт естественное преобразование, т.е. коммутативность соответствующего квадрата. Пусть $f\colon R \to S$ — гомоморфизм k-алгебр. Тогда для любого $\varphi \in \underline{\mathbb{A}^1}(R)$ имеем $S \otimes_R \sigma_R(\varphi) = S \otimes_R (xy - \varphi(T))_{R[x,y]} = (xy - f \circ \varphi(T))_{S[x,y]} = \sigma_S(f \circ \varphi)$, где индексы $R[x,y], S[x,y]$ возле скобочек показывают, в какой из алгебр рассматриваются соответствующие идеалы. Это и требовалось показать.

На самом деле верно, что в примере 2 функтор $\mathcal{H}^h_{\mathbb{A}^2,k^\times}$ представим схемой $\mathbb{P}^1$ (проективной прямой), но это показать несколько сложнее.

Определение 6. *Универсальным семейством* называется замкнутая T-инвариантная подсхема $U^h_{\mathbb{X},T} \subseteq H^h_{\mathbb{X},T} \times \mathbb{X}$, $U^h_{\mathbb{X},T} \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(H^h_{\mathbb{X},T})$, соответствующая тождественному отображению $\{\mathrm{id}\colon H^h_{\mathbb{X},T} \to H^h_{\mathbb{X},T}\} \in \underline{H^h_{\mathbb{X},T}}(H^h_{\mathbb{X},T})$ при изоморфизме функторов $\tau\colon \underline{H^h_{\mathbb{X},T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}$.

Предложение 6. *Для любой схемы $X \in \mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}(S)$ мы имеем $X = U^h_{\mathbb{X},T} \times_{H^h_{\mathbb{X},T}} S$ относительно морфизма $pr_{H^h_{\mathbb{X},T}}\colon U^h_{\mathbb{X},T} \to H^h_{\mathbb{X},T}$ и соответствующего данной схеме X морфизма $S \to H^h_{\mathbb{X},T}$.*

Доказательство. Для простоты сократим обозначения $H^h_{\mathbb{X},T}$, $U^h_{\mathbb{X},T}$ и $\mathcal{H}^h_{\mathbb{X},T}$ до H, U и $\mathcal{H}$ соответственно. В дальнейшем также будем допускать такие сокращения, если они не приводят к путанице.

Для любой схемы S мы имеем биекцию множеств $\tau_S\colon \mathrm{Mor}(S, H) \to \{X \subseteq S \times \mathbb{X}\}$. Для каждой схемы $X \in \mathcal{H}(S)$ обозначим через $\xi_X\colon S \to H$ соответствующий ей при этой биекции морфизм. Напомним, что согласно определению 4 имеем $U = \tau_H(\mathrm{id}_H)$.

Итак, $U \times_H S$ — расслоенное произведение относительно морфизмов $\mathrm{pr}_H\colon U \to H$ и $\xi_X\colon S \to H$. Наша задача — показать, что $X = U \times_H S$. Прежде всего заметим, что $U \times_H S$ можно рассматривать как подсхему в $S \times \mathbb{X}$. Действительно, равенство $U \times_H S = \hat{\xi}_X^{-1}(U) \subset S \times \mathbb{X}$ (см. обозначения определения 4) гарантирует следующая коммутативная диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
\hat{\xi}_X^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & U \arrow[d, hook] \\
S \times \mathbb{X} \arrow[r, "\hat{\xi}_X"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_S"'] & H \times \mathbb{X} \arrow[d, "\mathrm{pr}_H"] \\
S \arrow[r, "\xi_X"] & H.
\end{tikzcd}
$$

Далее, имеем диаграмму естественного преобразования τ:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_H \in \underline{H}(H) \arrow[r, "\tau_H"] \arrow[d, "\xi_X^*"'] & \mathcal{H}(H) \ni U \arrow[d, "\mathcal{H}(\xi_X)"] \\
\xi_X \in \underline{H}(S) \arrow[r, "\tau_S"] & \mathcal{H}(S) \ni X.
\end{tikzcd}$$

При этом мы знаем, что $X = \mathcal{H}(\xi_X)(U) = \hat{\xi}_X^{-1}(U) = U \times_H S$. $\square$

Список литературы

[1] V.Alexeev, M.Brion, *Moduli of affine schems with reductive group action*, J. Algebraic Geom. **14** (2005), no. 1, 83-117.

[2] D.Eisenbud, J.Harris, *The Geometry of Schems*, Springer-Verlag New-York, Inc, 2000.

[3] M.Haiman, B.Sturmfels, *Multigraded Hilbert Schems*, J. Algebraic Geom. **13** (2004), 725-769.

[4] R.Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texst in Math. **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[5] K.Ueno, *Algebraic geometry 1, 2, 3*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **185**, **197**, **218**, AMS (1999, 2001, 2003).

[6] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Москва, „Наука“, 1988.

[7] Э.Б.Винберг, В.Л.Попов, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 55. Алгебраическая геометрия — 4. II. Теория инвариантов.* Москва, ВИНИТИ, 1989.