ДВИЖЕНИЯ

Факультатив, 192 школа, 10 класс, занятие 1

Определение 1. Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками, называется *движением*.

Основные свойства движений:

(1) Преобразование, обратное движению, — движение;
(2) Композиция движений — движение;
(3) Движение переводит прямые в прямые, отрезки в отрезки, лучи в лучи, окружности в окружности, сохраняет углы.

Движение определяется образами любых трёх точек, не лежащих на одной прямой. Точнее говоря, верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и три точки A', B' и C' такие, что $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$. Тогда существует ровно одно движение f, для которого $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.*

Определение 2. (1) *Центральной симметрией* Z_O называется преобразование, переводящее каждую точку плоскости в симметричную ей относительно заданной точки O;
(2) *Осевой симметрией* S_l называется преобразование, переводящее каждую точку плоскости в симметричную ей относительно заданной прямой l;
(3) *Параллельным переносом* $T_{\overrightarrow{r}}$ называется преобразование, переводящее каждую точку M плоскости в такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{r}$;
(4) *Поворотом* R_O^α называется преобразование, переводящее каждую точку M плоскости в такую точку M', что $OM = OM'$ и ориентированный угол MOM' имеет величину α;
(5) *Скользящей симметрией* $W_l^{\overrightarrow{r}}$ называется композиция осевой симметрии S_l и параллельного переноса $T_{\overrightarrow{r}}$, где $\overrightarrow{r} \| l$ и $\overrightarrow{r} \neq 0$.

Задачи.

1. Доказать, что композиция двух осевых симметрий есть либо поворот, либо параллельный перенос. Обратно, любой поворот и любой параллельный перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий.
2. Доказать, что композиция параллельного переноса и осевой симметрии есть либо осевая, либо скользящая симметрия.

   Указание. Разложить параллельный перенос в композицию двух "хороших" параллельных переносов.

3. Доказать, что композиция поворота и осевой симметрии есть либо осевая, либо скользящая симметрия.

   Указание. Разложить поворот в композицию двух осевых симметрий с "хорошими" осями.

4. Доказать, что композиция любых трёх осевых симметрий есть либо осевая, либо скользящая симметрия.

5. Доказать, что любое движение плоскости представимо в виде композиции не более, чем трёх осевых симметрий.

   Указание. Пусть f — данное движение. Выбрать такую точку A, что $B := f(A) \neq A$. Далее найти такие осевые симметрии S_1 и S_2, что движение $g := S_2 \circ S_1 \circ f$ сохраняет точки A и B. Показать, что g — это либо осевая симметрия, либо тождественное преобразование.

6. **Теорема Шаля.** Доказать, что любое движение плоскости есть либо центральная симметрия, либо осевая симметрия, либо параллельный перенос, либо поворот, либо скользящая симметрия.

7. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Доказать, что окружности, описанные около треугольников HAB, HBC и HAC равны.

8. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Доказать, что прямая, соединяющая произвольную точку одной окружности с её образом при повороте вокруг точки A, отображающем эту окружность на другую, проходит через точку B.

9. Для произвольной точки M описанной около треугольника окружности построены симметричные ей относительно прямых BC, CA и AB соответственно точки M_1, M_2 и M_3. Доказать, что точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника ABC.