ГОМОТЕТИЯ

Факультатив, 192 школа, 10 класс, занятие 2

Определение 1. *Гомотетией* H_O^k с коэффициентом $k \neq 0$ и центром O называется преобразование, переводящее каждую точку M плоскости в такую точку M', что $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Свойства гомотетии:

(1) Преобразование, обратное гомотетии H_O^k, — гомотетия $H_O^{1/k}$;
(2) Гомотетия задаётся своим центром и образом одной точки, отличной от центра гомотетии;
(3) Композиция гомотетий с общим центром — гомотетия;
(4) Гомотетия переводит прямые в прямые, причём каждая прямая отображается либо на себя, либо на параллельную прямую;
(5) Гомотетия переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи, окружности в окружности, сохраняет углы.

Упражнение 1. Композицией гомотетий $H_B^{k_2} \circ H_A^{k_1}$ с различными центрами будет гомотетия с центром на прямой AB, если $k_1k_2 \neq 1$, и параллельный перенос, если $k_1k_2 = 1$. Докажите это.

Упражнение 2. Пусть даны две неравные окружности. Покажите, что существует две различных гомотетии, переводящие одну окружность в другую.

Как легко видеть, гомотетия, за исключением случаев $k = \pm 1$, не является движением плоскости. Кроме того, композиция гомотетии и движения не всегда является гомотетией (приведите соответствующий пример!). Рассмотрим такой класс преобразований плоскости, который будет включать все известные нам преобразования и их композиции.

Определение 2. *Подобием* называется такое преобразование плоскости, что для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполнено равенство $A'B' = k \cdot AB$, где $k > 0$ — фиксированное число, называемое *коэффициентом подобия.*

Упражнение 3. Докажите, что любое подобие можно представить в виде композиции гомотетии и движения.

Упражнение 4. Перечислите свойства подобия.

Задачи.

1. **Теорема Симсона.** Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой.

   Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 9 предыдущего занятия.

2. Пусть $\triangle ABC$ — неравносторонний, H — его ортоцентр, M — центр тяжести, O — центр описанной окружности, M_a — середина стороны BC, AH_a — высота.
   (1) Доказать, что $H_M^{-1/2}(H) = O$;
   Указание. А куда перейдёт треугольник ABC при этой гомотетии?
   (2) Доказать, что M лежит на отрезке HO и делит его в отношении $2:1$, считая от H;
   (3) Найти положение точки $O' = H_M^{-1/2}(O)$;
   (4) Доказать, что O' лежит на серединном перпендикуляре к M_aH_a.
   Прямая, на которой лежат точки H, M и O, называется **прямой Эйлера** треугольника ABC.
3. **Окружность девяти точек (окружность Эйлера).**
   (1) Доказать, что середины сторон треугольника и основания его высот лежат на одной окружности. Что является центром этой окружности? Чему равен её радиус?
   Указание. Пункты (3)-(4) предыдущей задачи тут очень пригодятся.
   (2) Доказать, что середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на той же окружности.
4. Доказать, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно: а) его сторон; б) середин его сторон лежат на окружности, описанной около этого треугольника.
5. Пусть точки A, B, C лежат на прямой l, а точки A', B', C' — на прямой l', причём $AB' \parallel A'B$, $BC' \parallel B'C$. Доказать, что $AC' \parallel A'C$.
   Это частный случай **теоремы Паппа**. С помощью этой задачи мы через несколько занятий докажем и общую версию этой теоремы.
6. Построить треугольник по двум углам и периметру.
7. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина A находилась в данной точке, а вершины B и C принадлежали данной окружности.
8. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали неперпендикулярны. Точки A' и C' — проекции вершин A и C на прямую BD, а точки B' и D' — ортогональные проекции вершин B и D на прямую AC. Доказать, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ подобен четырёхугольнику $ABCD$.