АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Факультатив, 192 школа, 10 класс, занятие 3

Определение 1. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно сохраняет отношения коллинеарных векторов. Последнее означает, что если A, B, C, D — точки на плоскости, а A', B', C', D' — их образы, причём $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Упражнение 1. Выведите из определения, что аффинное преобразование переводит прямые в прямые, причём параллельные прямые — в параллельные.

Пусть задано аффинное преобразование f. Зафиксируем на плоскости косоугольную систему координат $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Пусть далее $O' = f(O)$, $\overrightarrow{e_1'} = f(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2'} = f(\overrightarrow{e_2})$.

Упражнение 2. Преобразование плоскости — это по определению взаимно однозначное отображение множества точек плоскости на себя. Объясните, почему в случае аффинного преобразования мы можем говорить об образе вектора под действием преобразования.

Упражнение 3. Докажите, что $f(q\vec{a} + r\vec{b}) = qf(\vec{a}) + rf(\vec{b})$.

Пусть M — произвольная точка плоскости, $M' = f(M)$, $M = (x, y)$ в системе координат $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, т.е. $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$.

Упражнение 4. Докажите, что $M' = (x, y)$ в системе координат $(O', \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'})$.

Пусть $O' = (s, t)$, $\overrightarrow{e_1'} = (a, c)$, $\overrightarrow{e_2'} = (b, d)$ — в системе координат $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Вычислим координаты $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ точки M' в системе координат $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Имеем $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = (s\overrightarrow{e_1} + t\overrightarrow{e_2}) + (x\overrightarrow{e_1'} + y\overrightarrow{e_2'}) = (s\overrightarrow{e_1} + t\overrightarrow{e_2}) + (x(a\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2}) + y(b\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2})) = (ax + by + s)\overrightarrow{e_1} + (cx + dy + t)\overrightarrow{e_2}$. Таким образом,

$$\boxed{\widetilde{x} = ax + by + s, \quad \widetilde{y} = cx + dy + t}. \qquad (*)$$

Отметим, что $ad - bc \neq 0$ (почему?).

Определение 2. Число $\Delta = ad - bc$ называется *определителем аффинного преобразования*.

Упражнение 5. Пусть в некоторой системе координат преобразование f задаётся формулами $(*)$ с условием $ad - bc \neq 0$. Докажите, что f аффинно.

Лёгким следствием изложенного является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой и точки A', B', C' тоже не лежат на одной прямой. Тогда существует и притом единственное аффинное преобразование f, для которого $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.*

Старательный школьник может показать, что Δ не зависит от выбора исходной системы координат. Проделав такое упражнение, он затем легко сможет показать, что площадь любого треугольника под действием аффинного преобразования умножается на $|\Delta|$. Таким образом, аффинное преобразование сохраняет отношения площадей треугольников, а значит и отношения площадей всех фигур. Другой, более наглядный способ это показать заключается в представлении произвольного аффинного преобразования в виде композиции параллельного проектирования и подобия (и то, и другое сохраняет отношения площадей). Этим путём может пойти тот любопытный школьник, который уже успел достаточно далеко изучить учебник по стереометрии. Все остальные школьники могут пока что просто принять этот факт на веру :)

Вернёмся к формулам $(*)$. Легко понять, что числа s и t там отвечают просто за параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

Упражнение 6. Запишите формулы $(*)$ в случае, если f является параллельным переносом.

Мы уже обсуждали, что аффинное преобразование является не только преобразованием плоскости, но ещё и преобразованием множества векторов на плоскости. Причём в силу упражнения 3 это преобразование перестановочно с операциями сложения векторов и умножения вектора на число (отображение, обладающее таким свойством, называется *линейным*). Так как параллельный перенос не изменяет векторы, их новые координаты будут выражаться без участия s и t, а именно, легко убедиться, что если $\vec{a} = (u, v)$, то $f(\vec{a}) = (au + bv, cu + dv)$. Числа a, b, c, d обычно записывают в таблицу $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, которую по-научному называют *матрицей* линейного отображения, число $\Delta = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$ называют *определителем матрицы*, а формулы $(*)$ пишут в виде $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$.

Упражнение 7. Пусть формулы $(*)$ задают аффинное преобразование f. Напишите формулы для обратного преобразования.

Очевидно, преобразования движения и подобия являются аффинными.

Упражнение 8. Запишите формулы $(*)$ в случаях, когда f является центральной симметрией, осевой симметрией, поворотом, скользящей симметрией, гомотетией. Систему координат выберите декартовой и удобной для вычислений.

Упражнение 9. Пусть система координат декартова. Докажите, что преобразование, заданное формулами $(*)$, является движением тогда и только тогда, когда $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. В качестве следствия выведите, что для движения $\Delta = \pm 1$. Какие условия на a, b, c, d будут у преобразования подобия с коэффициентом k?

Свойства аффинных преобразований:

(1) Преобразование, обратное аффинному, является аффинным;
(2) Композиция аффинных преобразований — аффинное преобразование;
(3) Аффинное преобразование переводит прямые в прямые, параллельные прямые в параллельные прямые;

(4) Аффинное преобразование сохраняет отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой, либо на параллельных;
(5) Аффинное преобразование сохраняет отношения площадей фигур.

Если существует движение, переводящее одну фигуру в другую, то фигуры называются *равными*, если подобие — *подобными*. Будем называть две фигуры *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из них в другую. Так аффинно эквивалентны любые два треугольника, любые два параллелограмма, любая трапеция аффинно эквивалентна некоторой равнобокой.

Упражнение 10. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие аффинной эквивалентности двух трапеций.

Если в задаче все условия даны в терминах аффинной геометрии (параллельность прямых, отношения отрезков на одной прямой или на параллельных, отношения площадей фигур), то можно применить аффинное преобразование, приводящее фигуры к наиболее удобному виду (треугольник к правильному треугольнику, параллелограмм к квадрату и т.п.) и решать задачу уже для них. Например, покажем методами аффинной геометрии, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, и середины оснований лежат на одной прямой. Для этого применим аффинное преобразование, переводящее нашу трапецию в равнобокую. Но для равнобокой трапеции утверждение очевидно, ведь все упомянутые в условии точки лежат на её оси симметрии.

Задачи.

1. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Доказать, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Доказать, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.
3. В параллелограмме $ABCD$ точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки A_2, B_2, C_2, D_2. Известно, что
$$\frac{AA_1}{BA_1} = \frac{BB_1}{CB_1} = \frac{CC_1}{DC_1} = \frac{DD_1}{AD_1} = \frac{A_1D_2}{D_1D_2} = \frac{D_1C_2}{C_1C_2} = \frac{C_1B_2}{B_1B_2} = \frac{B_1A_2}{A_1A_2}.$$
Доказать, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм со сторонами, параллельными сторонам $ABCD$.
4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC даны точки M, N и P соответственно. Доказать, что:
   (1) если точки M_1, N_1 и P_1 симметричны точкам M, N и P относительно середин соответствующих сторон, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$;

(2) если M_1, N_1 и P_1 — такие точки сторон AC, BA и CB, что $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$ и $PP_1 \parallel AB$, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

5. Дан треугольник площадью S. Из его медиан построен другой треугольник, затем из медиан полученного треугольника построен третий треугольник и т.д. Найти площадь 2010-го треугольника в этой цепочке.

6*. Отмечено 100 точек — N вершин выпуклого N-угольника и $100 - N$ точек внутри этого N-угольника. Точки как-то обозначены, независимо от того, какие являются вершинами N-угольника, а какие лежат внутри. Известно, что никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на двух параллельных прямых. Разрешается задавать вопросы типа: чему равна площадь треугольника XYZ (X, Y, Z — из числа отмеченных точек). Доказать, что 300 вопросов достаточно, чтобы выяснить, какие точки являются вершинами и чтобы найти площадь N-угольника.

7*. (1) Доказать, что для любого аффинного преобразования можно найти на плоскости квадрат, переходящий при этом преобразовании в прямоугольник.

(2) Доказать, что если аффинное преобразование переводит некоторую окружность в окружность, то оно является подобием.

8**. (1) Доказать, что преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые и сохраняющее отношение "лежать между"для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, является аффинным.

(2) Доказать, что преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые, является аффинным.