ИНВЕРСИЯ

Факультатив, 192 школа, 10 класс, занятие 4

Определение 1. Пусть на плоскости задана окружность ω с центром O радиуса R. *Инверсией* $I_\omega = I_O^R$ относительно окружности ω называется преобразование, переводящее каждую точку M плоскости в такую точку M', лежащую на луче $[OM)$, для которой выполняется равенство

$$OM \cdot OM' = R^2. \qquad (*)$$

Точка O называется *центром инверсии*, R — *радиусом инверсии*, ω — *окружностью инверсии.*

Упражнение 1. Докажите, что образ точки M при инверсии I_ω с центром O можно строить следующим образом. Если точка M лежит вне окружности ω, то проведём через неё касательную к ω, а затем из точки касания опустим перпендикуляр на прямую OM. Основанием этого перпендикуляра и будет точка M'. Если же точка M лежит внутри ω, то её образ можно получить, проделав описанные действия в обратном порядке.

Упражнение 2. Если A' и B' — образы точек A и B при инверсии I_O^R, то $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$. Докажите это.

Упражнение 3. Найдите координаты образа точки (x, y) при инверсии относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Упражнение 4. Докажите, что две инверсии с общим центром O отличаются на гомотетию с центром O.

Формально говоря, по нашему определению инверсия не является преобразованием плоскости. Причина в том, что у нас не получится построить образ точки O в соответствии с условием $(*)$. Чтобы устранить эту маленькую неприятность, дополним плоскость ещё одной точкой, которую будем называть *бесконечно удалённой.* Бесконечно удалённую точку и будем считать образом точки O при инверсии. В свою очередь, образом бесконечно удалённой точки будет точка O. Таким образом, инверсия определяет честное преобразование *расширенной плоскости.*

Следующее определение нам понадобится, чтобы затем отметить важное свойство инверсии.

Определение 2. *Углом между двумя окружностями* называется угол между касательными к окружностям в точке их пересечения. *Угол между окружностью и прямой* — это угол между прямой и касательной к окружности в точке их пересечения.

Свойства инверсии:

(1) Инверсия I_ω переводит внутренние точки окружности ω во внешние и наоборот. Точки, лежащие на окружности ω, инверсия оставляет на месте;
(2) Преобразование, обратное инверсии I_ω, есть та же самая инверсия I_ω;
(3) Инверсия задаётся своим центром и образом одной точки, отличной от центра инверсии;
(4) При инверсии с центром O прямая проходящая, через O переходит в себя; прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O; окружность с центром C, проходящая через O переходит в прямую перпендикулярную OC; окружность, не проходящая через O переходит в окружность, не проходящую через O;
(5) Инверсия сохраняет углы между двумя окружностями, между двумя прямыми, между прямой и окружностью.

Упражнение 5. Дан треугольник ABC. Укажите все инверсии, при которых образы прямых AB, AC и BC — окружности одинакового радиуса.

Упражнение 6. Укажите, какие окружности переходят при инверсии в себя.

Упражнение 7. Докажите, что если две окружности переходят друг в друга при некоторой инверсии с центром O, то существует гомотетия с центром в точке O, переводящая одну окружность в другую. Верно ли обратное?

Упражнение 8. Докажите, что для любых двух непересекающихся окружностей существуют инверсии, переводящие их в концентрические окружности.

Упражнение 9. Изобразите образ квадрата, описанного вокруг окружности инверсии.

Обобщёнными окружностями на расширенной плоскости будем называть обычные окружности, а также прямые вместе с бесконечно удалённой точкой. Тогда основные свойства инверсии запишутся проще: инверсия переводит обобщённые окружности в обобщённые окружности и сохраняет углы между ними.

Из свойства сохранения углов следует то, что инверсия сохраняет свойство касания (нулевой угол). Однако, надо понимать, что частным случаем такого “касания” является параллельность прямых.

Упражнение 10. Укажите, в каком случае инверсия переводит касающиеся окружности в параллельные прямые.

Определение 3. Преобразования расширенной плоскости, сохраняющие обобщённые окружности, называются *круговыми.*

Если круговое преобразование сохраняет бесконечно удалённую точку, то оно сохраняет прямые, а потому (см. задачу 8 предыдущего занятия) является аффинным преобразованием. По задаче 7 предыдущего занятия такое аффинное преобразование обязано быть подобием.

Упражнение 11. Докажите, что круговое преобразование, не сохраняющее бесконечно удалённую точку, может быть представлено композицией инверсии и движения.

Задачи.

1. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найти множество их точек касания.
2. Найти множество точек касания пар окружностей, касающихся сторон данного угла в данных точках A и B.
3. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Доказать, что углы AOE и DOF равны.

Определение 4. На прямой взяты три точки A, B и C, причём C лежит между A и B. Построены три полуокружности с диаметрами AB, BC и AC, расположенные по одну сторону от этой прямой. Фигура, ограниченная этими полуокружностями, называется *арбелос*. Отрезок AB будем называть *диаметром арбелоса*.

4. **Задача Паппа.** Пусть полуокружности α, β и γ образуют арбелос. Окружность δ_1 вписана в арбелос, окружность δ_2 касается окружностей α, β и δ_1, окружность δ_3 касается окружностей α, β и δ_2 и т.д. Пусть R_n — радиус окружности δ_n, d_n — расстояние от центра окружности δ_n до диаметра арбелоса. Доказать, что тогда $\frac{d_n}{R_n} = 2n$.
5. **Задача Архимеда.** Пусть обозначения такие же, как в определении арбелоса. Перпендикуляр к AB в точке C делит арбелос на две равные части. Доказать, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой.
6. **Теорема Фейербаха.** Доказать, что окружность девяти точек касается вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника. *Указание. Сделать инверсию с центром в середине некоторой стороны треугольника, переводящую вписанную окружность в себя.*
7. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки C_1 и B_1 так, что $AC_1 = B_1C_1$ и вписанная окружность S треугольника ABC является вневписанной окружностью треугольника AB_1C_1. Доказать, что вписанная окружность треугольника AB_1C_1 касается окружности девяти точек треугольника ABC.
8. **Поризм Штейнера.** Рассмотрим две непересекающиеся окружности и построим цепочку окружностей, каждая из которых касается двух исходных окружностей и двух соседних в цепочке. Может случиться так, что эта цепочка замкнётся, то есть n-я окружность коснётся первой. Доказать, что если для двух данных окружностей какая-либо цепочка замкнулась, то замкнётся любая такая цепочка, независимо от выбора первой окружности, причём количество окружностей во всех цепочках будет одинаковым.
9. Через данную точку провести окружность, касающуюся двух данных окружностей.
10. **Задача Аполлония.** Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

11**. Придумать шарнирный механизм, переводящий движение одного шарнира по окружности в движение другого шарнира по прямой.