ИНВЕРСИЯ ПРОСТРАНСТВА И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Факультатив, 192 школа, 10 класс, занятие $4\frac{1}{2}$

Определение 1. Пусть в пространстве задана сфера Ω с центром O радиуса R. *Инверсией* $I_\Omega = I_O^R$ относительно сферы Ω называется преобразование, переводящее каждую точку M пространства в такую точку M', лежащую на луче $[OM)$, для которой выполняется равенство $OM \cdot OM' = R^2$.

Естественно, для того, чтобы всё было хорошо определено, дополняем пространство бесконечно удалённой точкой, которая при инверсии является образом точки O, центра инверсии.

Упражнение 1. Докажите, что при инверсии пространства сфера, проходящая через центр инверсии, переходит в плоскость, а сфера, не проходящая через центр инверсии, — в сферу.

Упражнение 2. Докажите, что при инверсии пространства окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, а окружность, не проходящая через центр инверсии, — в окружность.

Рассмотрим сферу Θ с центром O радиуса R и плоскость α, касающуюся сферы Θ в некоторой точке S. Пусть N — точка на Θ, диаметрально противоположная точке S.

Определение 2. Стереографической проекцией сферы Θ на плоскость α из точки N называется отображение SP_α^Θ, переводящее отличную от N точку A сферы Θ, в точку пересечения прямой (NA) и плоскости α. Если плоскость α рассматривать вместе с бесконечно удалённой точкой, то можно считать, что эта точка является образом точки N.

Упражнение 3. Докажите, что отображение стереографической проекции SP_α^Θ совпадает с ограничением преобразования инверсии I_N^{2R} на сферу Θ. Куда при стереографической проекции переходят окружности, лежащие на сфере Θ?

Пусть β — плоскость, проходящая через O и параллельная плоскости α, S_β — симметрия пространства относительно плоскости β, ω — окружность в плоскости α с центром S радиуса $2R$.

Упражнение 4. Докажите, что инверсию I_ω плоскости α можно представить в виде композиции $I_\omega = SP_\alpha^\Theta \circ S_\beta \circ (SP_\alpha^\Theta)^{-1}$.

Определение 3. Назовем *гексаэдром* многогранник с шестью четырехугольными гранями, которые сходятся по три в каждой вершине.

Таким образом, у гексаэдра шесть граней, восемь вершин и двенадцать ребер. Примерами гексаэдров служат параллелепипеды и усеченные четырехугольные пирамиды. Однако можно рассматривать гексаэдры самого общего вида, не накладывая каких-либо дополнительных условий на их грани и ребра.

Задача.

Доказать, что если семь вершин гексаэдра лежат на сфере, то и восьмая вершина лежит на этой сфере.