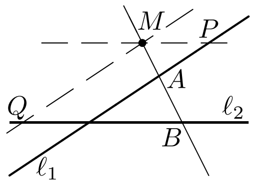
ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Факультатив, 192 школа, 10 класс, занятие 5

1. Два подхода к определению проективных преобразований прямой

На занятии 3 мы обсуждали, что аффинные преобразования соответствуют параллельному проектированию. Точно так же проективные преобразования соответствуют центральному проектированию. И здесь нам полезно будет начать с центрального проектирования прямой (в случае аффинных преобразований это было бессмысленно, т.к. все аффинные преобразования прямой суть подобия).

Определение 1. Пусть на плоскости даны прямые ℓ_1, ℓ_2 и точка M, не лежащая на них. *Центральным проектированием* прямой ℓ_1 на прямую ℓ_2 из точки M называется отображение, которое каждой точке $A \in \ell_1$ ставит в соответствие точку B пересечения прямых (MA) и ℓ_2 (см. рис).



Упражнение 1. Куда при центральном проектировании может перейти отрезок; луч?

Как видно из рисунка, центральное проектирование не определено вдоль направлений, параллельных прямым ℓ_1 и ℓ_2. Таким образом, в случае, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 не параллельны, найдётся точка $P \in \ell_1$, которая при центральном проектировании не имеет образа, и точка $Q \in \ell_2$, которая не имеет прообраза. Эти точки называются *выделенными.* Решим эту проблему добавлением к прямой бесконечно удалённой точки. Бесконечно удалённая точка прямой ℓ_2 будет образом точки P, а бесконечно удалённая точка прямой ℓ_1 будет прообразом точки Q.

Определение 2. *Проективной прямой* называется прямая вместе с бесконечно удалённой точкой.

Если считать, что ℓ_1 и ℓ_2 — две копии одной и той же прямой ℓ, то центральное проектирование будет задавать преобразование проективной прямой ℓ. Такие преобразования составляют множество всех *проективных преобразований* прямой. Позже будет дано альтернативное определение проективного преобразования, а в упражнениях вы докажете эквивалентность определений.

Следующая величина доставляет важный инвариант проективных преобразований.

Определение 3. *Двойным отношением* четырёх точек A, B, C, D, лежащих на одной (проективной) прямой, называют число

$$(AB;CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Напомним, что отношением коллинеарных векторов называется отношение их длин, взятое с положительным знаком, если векторы сонаправлены, и с отрицательным знаком, если векторы противоположнонаправлены. Если одна из точек A, B, C, D является бесконечно удалённой, то в определении двойного отношения длины отрезков, концом которых является эта точка, сокращаются между собой.

Упражнение 2. Как будет меняться двойное отношение $(AB;CD)$ при перестановках буковок A, B, C, D внутри скобок?

Упражнение 3. Докажите, что если $(AB;CX) = (AB;CY)$, то $X = Y$.

Определение 4. *Двойным отношением* четырёх прямых a, b, c, d, лежащих в одной плоскости и пересекающихся в одной точке, называют число

$$(ab;cd) = \pm\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)},$$

где знак “$-$” берётся, если между прямыми a и b ровно одна из прямых c и d, и “$+$” — в противном случае.

Упражнение 4. Пусть прямые a, b, c, d такие, как в определении 4, а прямая ℓ пересекается с ними в точках A, B, C, D соответственно. Докажите, что $(ab;cd) = (AB;CD)$. Исходя из этого, подумайте, как определить двойное отношение четырёх прямых в случае, если одна из них — бесконечно удалённая.

Упражнение 5. Пусть при центральном проектировании прямой ℓ_1 на прямую ℓ_2 точки $A, B, C, D \in \ell_1$ перешли в точки $A', B', C', D' \in \ell_2$ соответственно. Докажите, что $(AB;CD) = (A'B';C'D')$. Таким образом, проективные преобразования сохраняют двойное отношение.

Упражнение 6. Пусть $A, B, C, A', B', C' \in \ell$. Докажите, что существует проективное преобразование прямой ℓ, переводящее A в A', B в B', C в C'.

Упражнение 7. Проверьте, что композиция центральных проектирований может быть реализована в виде одного центрального проектирования.

Из упражнений 3-6 следует:

Теорема 1. *Проективное преобразование прямой определяется заданием трёх точек и их образов.*

Упражнение 8. Пусть x — координата на прямой. Докажите, что преобразование этой прямой является проективным тогда и только тогда, когда оно имеет вид $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, где $\Delta := ad - bc \neq 0$.

Как мы позже увидим, уже знакомый нам “определитель” Δ возник отнюдь не случайно.

Сейчас мы забудем о центральных проектированиях и дадим более абстрактное, но и более естественное определение проективных преобразований. Сразу станет ясным равноправие всех точек проективной прямой, а определение проективного преобразования моментально получится из определения аффинного преобразования.

Рассмотрим обычную аффинную плоскость $\mathbb{A}^2$ и введём на ней координаты (x, y).

Определение 5. *Проективной прямой* $\mathbb{P}^1$ будем называть множество всех прямых на плоскости $\mathbb{A}^2$, проходящих через точку O с координатами $(0, 0)$.

В привычной для нас модели элементы прямой — это точки. В приведённом выше определении точками проективной прямой будут прямые на аффинной плоскости. Первоначально это может шокировать читателя, но всё прояснит соответствие между пополненной аффинной прямой из определения 2 и абстрактной проективной прямой из определения 5, которое мы сейчас опишем.

Прямую из определения 2 вложим в плоскость $\mathbb{A}^2$ в качестве прямой ℓ, заданной уравнением $y = 1$. Абстрактную проективную прямую $\mathbb{P}^1$ будем отождествлять с множеством прямых этой же плоскости, проходящих через O. Соответствие между ℓ и $\mathbb{P}^1$ устроено следующим образом: каждой точке $A \in \ell$ соответствует точка $(OA) \in \mathbb{P}^1$, обратно каждой точке $a \in \mathbb{P}^1$ соответствует точка $a \cap \ell$. Дополнительно положим, что бесконечно удалённая точка прямой ℓ соответствует прямой $y = 0$, параллельной ℓ и являющейся точкой $\mathbb{P}^1$. Прямая ℓ без бесконечно удалённой точки называется *аффинной картой* проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Эта карта покрывает всю прямую $\mathbb{P}^1$, кроме точки, соответствующей прямой $y = 0$.

На проективной прямой можно ввести *однородные координаты*, а именно точке $\mathbb{P}^1$ или, что то же самое, прямой на $\mathbb{A}^2$ поставим в соответствие координаты её направляющего вектора $(x : y)$. Эти координаты определены с точностью до умножения на ненулевую константу, и поэтому записываются не через запятую, а через знак ":". Описанное взаимнооднозначное соответствие между $\mathbb{P}^1$ и ℓ в координатах записывается так:

$\mathbb{P}^1$		ℓ
$(x : y)$	$\longrightarrow$	$\frac{x}{y}$
$(x : 1)$	$\longleftarrow$	x
$(1 : 0)$	$\longleftrightarrow$	∞

Определение 6. Пусть проективная прямая $\mathbb{P}^1$ рассматривается как множество прямых на плоскости $\mathbb{A}^2$, проходящих через O. Тогда аффинное преобразование плоскости $\mathbb{A}^2$, сохраняющее O, индуцирует преобразование прямой $\mathbb{P}^1$. Такие преобразования и называются *проективными.*

Из занятия 3 мы знаем, что аффинные преобразования плоскости, сохраняющие O, задаются матрицей $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ и в координатах выглядят как $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$.

Упражнение 9. Докажите, что соответствующее преобразование $\mathbb{P}^1$ запишется в виде $(x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy)$.

Как видно из упражнения 9, одновременное умножение всех элементов матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ на одно и то же число $k \neq 0$ не изменяет индуцированного проективного преобразования. Это и не удивительно, так как умножение матрицы на k соответствует композиции аффинного преобразования с гомотетией H_O^k, которая оставляет все точки проективной прямой $\mathbb{P}^1$ неподвижными.

Описанное ранее биективное соответствие между $\mathbb{P}^1$ и ℓ позволяет записать в координатах и соответствующее преобразование прямой ℓ.

Упражнение 10. Докажите, что соответствующее проективное преобразование прямой ℓ запишется в виде $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.

Из упражнений 8 и 10 следует эквивалентность двух определений проективного преобразования: через центральное проектирование и определения 9. Более того, каждому проективному преобразованию поставлена в соответствие матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, элементы которой определены с точностью до умножения на одно и то же ненулевое число, а определитель отличен от 0.

2. Проективная плоскость

Определения проективной плоскости и её проективного преобразования аналогичны одномерному случаю, разобранному выше. Но геометрия проективной плоскости, конечно, гораздо богаче.

Определение 7. Пусть в пространстве даны плоскости α_1, α_2 и точка M, не лежащая на них. *Центральным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 из точки M называется отображение, которое каждой точке $A \in \alpha_1$ ставит в соответствие точку B пересечения прямой (MA) и плоскости α_2.

Теперь уже в случае $\alpha_1 \nparallel \alpha_2$ на плоскостях проектирования образуются не выделенные точки, а выделенные прямые, на которых центральное проектирование не определено.

Упражнение 11. Укажите, куда при центральном проектировании переходят параллельные прямые; прямые, пересекающиеся на выделенной прямой.

Чтобы сделать центральное проектирование биективным отображением, надо к плоскостям добавить бесконечно удалённые прямые. Эти бесконечно удалённые прямые при центральном проектировании будут сопоставляться выделенным.

Определение 8. *Проективная плоскость* — это обычная (аффинная) плоскость, дополненная бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой, называемыми также несобственными элементами. При этом каждая прямая дополняется одной несобственной точкой, вся плоскость — одной несобственной прямой; параллельные прямые дополняются общей несобственной точкой, непараллельные — разными; несобственные точки, дополняющие всевозможные прямые плоскости, составляют множество точек несобственной прямой.

Упражнение 12. Покажите, что на проективной плоскости любые две прямые пересекаются ровно в одной точке.

Упражнение 13. Укажите, как продолжить отображение центрального проектирования на выделенную и несобственную прямые так, чтобы оно давало взаимнооднозначное отображение проективных плоскостей, переводящее прямые в прямые.

Если отождествить плоскости проектирования, то центральное проектирование будет задавать некоторое преобразование проективной плоскости. Такие преобразования, аффинные преобразования и любые композиции этих преобразований составляют множество всех *проективных преобразований* плоскости.

Свойства проективных преобразований.

(1) Проективные преобразования переводят прямые в прямые;
(2) Проективные преобразования сохраняют двойные отношения четырёх точек, лежащих на одной прямой;
(3) Любая прямая может проективным преобразованием быть переведена в бесконечно удалённую;
(4) Проективное преобразование, сохраняющее бесконечно удалённую прямую является аффинным.

Упражнение 14. Докажите эти свойства. Для доказательства свойства (4) можно воспользоваться утверждением из задачи 8(1) третьего занятия. Из более сильного пункта (2) той же задачи выведите, что преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые, является проективным.

Упражнение 15. Пусть A, B, C, D — четыре точки на проективной плоскости, находящиеся в общем положении (т.е. никакие три не лежат на одной прямой), A', B', C', D' — четыре точки с тем же условием. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C', D в D'.

Упражнение 16. Докажите, что проективное преобразование определяется заданием четырёх точек, находящихся в общем положении, и их образов.

Упражнение 17. Пусть x, y — координаты на плоскости. Докажите, что преобразование этой плоскости является проективным тогда и только тогда, когда оно в координатах имеет вид $(x,y) \mapsto \left(\frac{ax+by+c}{gx+hy+i}, \frac{dx+ey+f}{gx+hy+i}\right)$, где $\Delta := aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0$.

Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ фиксирована некоторая система координат (O, x, y, z). Абстрактная проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ определяется так: точки $\mathbb{P}^2$ — это прямые в аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$, проходящие через точку O (начало координат), прямые $\mathbb{P}^2$ — это плоскости в $\mathbb{A}^3$, содержащие точку O. Отношение "точка принадлежит прямой" в $\mathbb{P}^2$ будут соответствовать отношению "прямая содержится в плоскости" в $\mathbb{A}^3$.

Упражнение 18. Постройте взаимнооднозначное соответствие между абстрактной проективной плоскостью и проективной плоскостью из определения 8, сохраняющее прямые. Таким образом вы покажете, что на самом деле это один и тот же объект.

Чтобы определить проективные преобразования абстрактной проективной плоскости, надо обратиться к аффинным преобразованиям пространства $\mathbb{A}^3$. Теория аффинных преобразований пространства ничем не отличается от теории аффинных преобразований плоскости, и при желании вы легко её восстановите. Нам от всей этой теории надо лишь то, что все аффинные преобразования пространства имеют вид $\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{y}\\ \widetilde{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p\\ r\\ q\end{pmatrix}$, где определитель

$\Delta := aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg \neq 0$. Или, если без матриц, $\widetilde{x} = ax+by+cz+p$, $\widetilde{y} = dx + ey + fz + q$, $\widetilde{x} = gx + hy + iz + r$.

Определение 9. Пусть проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ рассматривается как множество прямых в пространстве $\mathbb{A}^3$, проходящих через O. Тогда аффинное преобразование пространства $\mathbb{A}^3$, сохраняющее O, индуцирует некоторое преобразование плоскости $\mathbb{P}^2$. Такие преобразования и называются *проективными.*

На проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ вводятся однородные координаты $(x : y : z)$, где (x, y, z) — координаты направляющего вектора соответствующей прямой в $\mathbb{A}^3$, определённые с точностью до умножения на ненулевую константу.

Упражнение 19. Запишите уравнения проективных преобразований в координатах. Покажите эквивалентность тех двух определений проективного преобразования, которые мы дали.

Упражнение 20. Покажите, что уравнения прямых на проективной плоскости имеют вид $ax+by+cz = 0$, где a, b, c — постоянные числа, не все равные нулю.

Будем говорить, что $(a : b : c)$ — однородные координаты прямой, заданной уравнением $ax + by + cz = 0$. Как и координаты точек, они определены с точностью до умножения на ненулевую константу.

Упражнение 21. Как преобразуются координаты прямой под действием проективного преобразования, заданного матрицей $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{smallmatrix}\right)$?

3. Применение проективных преобразований для решения задач

Проективные преобразования можно применять для решения задач, сформулированных в терминах пересечения прямых. С помощью проективных преобразований в таких задачах можно добиться значительных упрощений. Так пересекающиеся прямые могут быть переведены в параллельные, произвольный четырёхугольник может быть переведён в квадрат. Продемонстрируем эффективность проективных преобразований на следующем примере:

Теорема 2 (Теорема Паппа). *Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, а A', B', C' — на другой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают прямые $A'B$, $B'C$, $C'A$, соответственно в точках X, Y и Z. Тогда X, Y и Z лежат на одной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее прямую XY в бесконечно удалённую (оно найдётся по свойству (3) проективных преобразований плоскости). При этом преобразовании прямые AB' и $A'B$ перейдут в параллельные; то же касается и пары прямых BC' и $B'C$. Тогда по задаче 5 из занятия 2 образы прямых CA' и $C'A$ так же будут параллельными. Таким образом, образы всех трёх точек X, Y и Z будут лежать на одной прямой, а именно на бесконечно удалённой прямой. Но отсюда сразу следует, что и сами точки X, Y, Z лежали на одной прямой. □

Аналогичным способом вы решите задачу 2.

Класс задач, которые можно решать с помощью проективных преобразований, невелик. Утверждения следующих двух упражнений дадут возможность немного его расширить и использовать проективные преобразования для решения некоторых задач, в которых фигурирует окружность.

Упражнение 22. Дана окружность ω и точка M внутри неё. Докажите, что существует проективное преобразование, при котором ω переходит в окружность, а точка M — в её центр.

Упражнение 23. Дана окружность ω и не пересекающая её прямая ℓ. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а ℓ — в бесконечно удалённую прямую.

В частности, с помощью этих двух упражнений вы сможете решить задачи 4-6.

4. Принцип двойственности

Вспомним, что уравнение прямой на проективной плоскости имеет вид $ax + by + cz = 0$, где a, b, c — постоянные числа, определённые с точностью до умножения на ненулевую константу и не все равные нулю. Можно говорить, что $(a : b : c)$ — координаты прямой, заданной уравнением $ax + by + cz = 0$. Замечательным образом на проективной плоскости обнаруживается полная симметрия между точками и прямыми: условие того, что точка с координатами $(x : y : z)$ лежит на прямой $(a : b : c)$, возникает одновременно с условием того, что точка с координатами $(a : b : c)$ лежит на прямой $(x : y : z)$. Соответствие, которое ставит в соответствие точке с координатами $(a : b : c)$ прямую с координатами $(a : b : c)$ и наоборот, называется двойственностью.

Дадим геометрическую конструкцию этого соответствия. Уже привыкнув к тому, что точки абстрактной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ — это прямые в $\mathbb{A}^3$, а прямые — плоскости, попробуем всё поменять. Определим двойственную проективную плоскость $(\mathbb{P}^2)^\vee$, для которой точки — это плоскости в $\mathbb{A}^3$, проходящие через O, а прямые — это прямые в $\mathbb{A}^3$, проходящие через O. Отношение "точка принадлежит прямой" в $(\mathbb{P}^2)^\vee$ будет соответствовать отношению "плоскость содержит прямую" в $\mathbb{A}^3$.

Двойственная проективная плоскость $(\mathbb{P}^2)^\vee$ возникла у нас вместе с естественными взаимнооднозначными соответствиями между точками $\mathbb{P}^2$ и прямыми в $(\mathbb{P}^2)^\vee$ и, наоборот, между прямыми в $\mathbb{P}^2$ и точками $(\mathbb{P}^2)^\vee$, причём отношение "лежать на прямой" заменяется на отношение "проходить через точку" и наоборот.

Пока что ещё не ясно, почему $(\mathbb{P}^2)^\vee$ можно тоже считать проективной плоскостью. Для того, чтобы это показать, построим взаимнооднозначное отображение из $(\mathbb{P}^2)^\vee$ в $\mathbb{P}^2$. А именно, представляя точку в $(\mathbb{P}^2)^\vee$ как плоскость в $\mathbb{A}^3$, поставим ей в соответствие прямую, перпендикулярную этой плоскости и проходящую через O, которая является уже точкой в $\mathbb{P}^2$.

Упражнение 24. Проверьте, что прямые при таком отображении переходят в прямые.

Упражнение 25. Покажите, что соответствие двойственности, определённое аналитически, совпадает с композицией только что определённых соответствий: $\mathbb{P}^2 \to (\mathbb{P}^2)^\vee \to \mathbb{P}^2$, где первая стрелка меняет точки и прямые.

Вся прелесть этой конструкции состоит в том, что теперь, доказав некоторые факты из проективной геометрии, мы бесплатно получаем двойственные им утверждения. Точнее имеет место следующая теорема.

Теорема 3 (Принцип двойственности)**.** *Пусть доказано некоторое проективное утверждение. Тогда верным будет и утверждение, полученное из доказанного взаимной заменой следующих терминов:*

(точка)⟷ (прямая)
(лежать на прямой)⟷(проходить через точку)
(двойное отношение четырёх точек, лежащих на одной прямой) ⟷
(двойное отношение четырёх прямых, проходящих через одну точку).

Рассмотрим в качестве примера теорему Дезарга (см. задачу 2). Двойственной фигурой к треугольнику будет снова треугольник, но в двойственном утверждении поменяются местами вершины и стороны. Учитывая это, двойственное утверждение к теореме Дезарга выглядит так:

Если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что точки пересечения соответственных сторон треугольников (точнее, прямых, на которых они лежат) лежат на одной прямой, то три прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке.

Отметим, что в данном случае двойственное утверждение совпало с обратным (хотя вообще говоря это, конечно, не всегда так). Если нам удалось доказать теорему Дезарга, то доказывать это утверждение уже нет необходимости. Но, если нам очень хочется получить прямое доказательство, то это легко сделать, заменив рассуждения в доказательстве теоремы Дезарга на "двойственные".

Упражнение 26. Сформулируйте утверждение, двойственное к теореме Паппа.

Двойственность можно ввести и не обращаясь к абстрактной проективной плоскости. Рассмотрим проективную плоскость как обычную евклидову плоскость вместе с бесконечно удалённой прямой.

Определение 10. *Полярное соответствие* относительно окружности ω с центром O радиуса r ставит в соответствие каждой точке A, отличной от O, прямую a, перпендикулярную лучу $[OA)$ и пересекающую его в такой точке A', что $OA \cdot OA' = r^2$. Прямая a называется *полярой* точки A относительно ω, а точка A — полюсом прямой a. Полярой точки O является бесконечно удалённая прямая, а полярой бесконечно удалённой точки — прямая, на которой лежит диаметр, перпендикулярный направлению, соответствующему этой точке.

Полярное соответствие является взаимнооднозначным соответствием между точками проективной плоскости и прямыми на проективной плоскости.

Свойства полярного соответствия относительно окружности ω.

(1) Если точка A лежала на окружности ω, то её поляра касается ω в точке A;
(2) Если точка B лежит на поляре точки A, то поляра точки B проходит через A;
(3) Полюс прямой является пересечением поляр всех её точек;

(4) Поляра точки является геометрическим местом полюсов всех проходящих через эту точку прямых;
(5) Полярой точки A, лежащей вне окружности, будет прямая, соединяющая точки касания окружности с касательными, проведёнными к ней из точки A;
(6) Если проективное преобразование сохраняет окружность ω и переводит точку A в A', то поляра точки A при этом преобразовании переходит в поляру точки A'.

В следующем упражнении вы покажете, что двойственность и полярное соответствие — это фактически одно и то же.

Упражнение 27. В упражнении 18 вы строили биекцию между абстрактной проективной плоскостью и евклидовой плоскостью, пополненной бесконечно удалённой прямой. Свяжите с помощью этой биекции соответствие двойственности и полярное соответствие.

Выделенная окружность позволяет пополнить принцип двойственности соответствием:

$$(\text{лежать на окружности } \omega) \longleftrightarrow (\text{касаться окружности } \omega).$$

Упражнение 28. Учитывая это дополнение, найдите среди задач этого листка двойственные утверждения.

Задачи.

1. **Теорема о полном четырёхстороннике.** Даны четыре точки A, B, C, D. Пусть Q, R — точки пересечения прямых AD с BC и AC с BD соответственно; K и L — точки пересечения прямой QR с прямыми AB и CD соответственно. Доказать, что $(QR; KL) = -1$.
2. **Теорема Дезарга.** Доказать, что если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения трёх пар соответственных сторон треугольников, лежат на одной прямой.
3. Доказать, что прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.
4. **Теорема Брианшона.** Доказать, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.
5. **Теорема Паскаля.** Доказать, что точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.
6. **Задача о бабочке.** Пусть O — середина хорды AB окружности ω; MN и PQ — произвольные хорды, проходящие через O, причем точки P и N лежат по одну сторону от AB; E и F — точки пересечения хорды AB с хордами MP и NQ соответственно. Доказать, что O — середина отрезка EF.
7. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ взята точка M_1. Пусть M_2 — проекция M_1 на прямую BC из D, M_3— проекция M_2 на CD из A, M_4 — проекция M_3 на DA из B, M_5 — проекция M_4 на AB из C и т. д. Доказать, что $M_{13} = M_1$.

8. Доказать, что с помощью одной линейки нельзя построить a) середину данного отрезка; b) центр данной окружности.
9. Можно ли окрасить 1000 точек аффинной плоскости в красный цвет и 500 — в синий так, чтобы любая прямая, проходящая через две точки разных цветов, содержала ещё одну из окрашенных точек, но чтобы все окрашенные точки не лежали на одной прямой?

5. Бонус

Следующая задача на применение проективного преобразования пространства. До решения этой задачи вам предлагается самостоятельно определить такие преобразования по аналогии со случаями прямой и плоскости и разобраться со свойствами таких преобразований.

Задача. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D' соответственно. Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

С завершением этого листка тем не менее остаётся большой простор для движения вглубь проективной геометрии. Окружность не является проективной фигурой, и поэтому все факты с участием окружностей, рассмотренные на этом занятии, следует обобщить на кривые второго порядка (они же коники). Следует также определить образы кривых при отображении двойственности. Этим мы займёмся потом, если хватит сил и времени...